# תרגול 5

היום:

- אינטגרל לא אמיתי.
- טור גיאומטרי.

**תזכורת:**
יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ . נניח ש $f$ אינטגרבילית ב $[a, b]$ לכל $b > a$.
נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^\infty f(x)\,dx$ <u>מתכנס</u>, אם קיים הגבול $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.
במקרה זה נגדיר

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

באופן דומה נגדיר

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נאמר כי $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ <u>מתכנס</u> אם $\int_0^\infty f(x)\,dx$ ו $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ שניהם מתכנסים. במקרה זה נגדיר

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx$$

תהיינה $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש $a < b$ ותהי $f$ פונקציה המוגדרת ב $(a, b]$.
נניח ש $f$ אינטגרבילית ב $[a + \delta, b]$ לכל $0 < \delta < b - a$. נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_a^b f(x)\,dx$ <u>מתכנס</u>, אם קיים הגבול $\lim\limits_{\delta\to0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$.
במקרה זה נגדיר $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\delta\to0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$.

תהיינה $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש $a < b$ ותהי $f$ פונקציה המוגדרת ב $[a, b)$.
נניח ש $f$ אינטגרבילית ב $[a, b - \delta]$ לכל $0 < \delta < b - a$. נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_a^b f(x)\,dx$ <u>מתכנס</u>, אם קיים הגבול $\lim\limits_{\delta\to0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$.
במקרה זה נגדיר $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\delta\to0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$.

**דוגמאות:**

1. קבעו האם האינטגרל הלא אמיתי הבא מתכנס, אם כן - חשבו את ערכו

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$$

**פתרון:**
נעבוד עם ההגדרה

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \lim_{b\to\infty} [\ln \mid \ln x \mid]_2^b =$$

$$\lim_{b\to\infty} (\ln \mid \ln b \mid - \ln \mid \ln 2 \mid) = \boldsymbol{\infty}$$

לכן האינטגרל **מתבדר** (לא מתכנס).

2. קבעו עבור אילו ערכי $p \in \mathbb{R}$ האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^\infty e^{px} dx$ מתכנס.

**פתרון:**
נפריד למקרים: $p < 0$, $p = 0$, $p > 0$.

<u>עבור $p = 0$:</u>

$$\int_0^\infty e^{0\cdot x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b 1 \cdot dx = \lim_{b\to\infty} (b - 0) = \boldsymbol{\infty}$$

<u>עבור $p > 0$:</u>

$$\int_0^\infty e^{px} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{px} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{pt}}{p}\right]_0^b =$$

$$\lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{pb}}{p} - \frac{1}{p}\right) = \boldsymbol{\infty}$$

<u>עבור $p < 0$:</u>

$$\int_0^\infty e^{px} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{px} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{pt}}{p}\right]_0^b =$$

$$\lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{pb}}{p} - \frac{1}{p}\right) = 0 - \frac{1}{p} = \boldsymbol{-\frac{1}{p}}$$

לסיכום:

$$\boldsymbol{\int_0^\infty e^{px} dx = \begin{cases} -\frac{1}{p} & p < 0 \\ \infty & p \geq 0 \end{cases}}$$

3. קבעו האם האינטגרל הלא אמיתי הבא מתכנס, אם כן - חשבו את ערכו

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

**פתרון:**
נעבוד עם ההגדרה

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

נחשב את כל אחד מהאינטגרלים בנפרד

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx =$$

$$\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \lim_{a \to -\infty} \left[\arctan\left(e^x\right)\right]_a^0 =$$

$$\lim_{a \to -\infty} \left(\arctan(1) - \arctan\left(e^a\right)\right) = \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(e^a\right)\right) = \frac{\pi}{4} - 0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx =$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \lim_{b \to \infty} \left[\arctan\left(e^x\right)\right]_0^b =$$

$$\lim_{b \to \infty} \left(\arctan\left(e^b\right) - \arctan(1)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

שני הגבולות קיימים, לכן האינטגרל שווה לסכומם

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

4. קבעו האם האינטגרל הלא אמיתי הבא מתכנס, אם כן - חשבו את ערכו

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$$

**פתרון:**
נעבוד עם ההגדרה

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx$$

נחשב את האינטגרל השמאלי

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{t} dt = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{-1}^{0-\delta} \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \to 0^+} [\ln \mid x \mid]_{-1}^{-\delta} =$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} (\ln \mid -\delta \mid - \ln \mid -1 \mid) = \lim_{\delta \to 0^+} \ln \delta = -\infty$$

קיבלנו שהאינטגרל מתבדר באחד מהתחומים ולכן **האינטגרל מתבדר**.

**תזכורת (מבחן ההשוואה):**
יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהיינה $f, g$ שתי פונקציות המוגדרות ב $[a, \infty)$. נניח כי
1. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \geq a$.
2. $f, g$ אינטגרביליות ב $[a, b]$ לכל $b > a$.
3. $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס.

אזי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס ובנוסף,

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx$$

לכל $p \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p > 1 \\ \infty & p \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p < 1 \\ \infty & p \geq 1 \end{cases}$$

**דוגמאות:**
קבעו האם האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים מתכנסים או מתבדרים:
1. $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+x^2+1}dx$

**פתרון:**

$$\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+x^2+1}dx \leq \int_1^\infty \frac{x+x}{x^3+x^2}dx \leq \int_1^\infty \frac{2x}{x^3}dx = 2\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \underset{p>1}{<} \infty$$

ולכן $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+x^2+1}dx < \infty$.

2. $\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x}dx$

**פתרון:**
arctan היא פונקציה עולה, לכן לכל $x \geq 1$ מתקיים $\arctan(x) \geq \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ולכן

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x}dx \geq \int_1^\infty \frac{\pi}{4x}dx = \frac{\pi}{4}\int_1^\infty \frac{1}{x}dx \underset{p=1}{=} \infty$$

ולכן $\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x}dx = \infty$.

3. $\int_0^1 \frac{x}{\sin x} dx$

**פתרון:**
הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית והיא נבדלת בנקודה אחת מהפונקציה הנתונה בשאלה ולכן האינטגרל $\int_0^1 \frac{x}{\sin x} dx$ מתכנס.

4. $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$

**פתרון:**
נשים לב כי לכל $0 < x \leq 1$ מתקיים

$$0 < \sin x \leq x \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}$$

ולכן

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x} dx \underset{p=1}{=} \infty$$

ולכן $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx = \infty$.

**תזכורת:**
יהי $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ ותהי $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים.
נאמר שהטור $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ <u>מתכנס</u> אם קיים הגבול $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=k}^{N} a_n$.
במקרה זה נגדיר

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=k}^{N} a_n$$

<u>הטור הגיאומטרי:</u>
יהי $q \in \mathbb{R}$, אזי

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \text{diverges} & \text{else} \end{cases}$$

**דוגמא:**
קבעו האם הטור הבא מתכנס, אם כן מצאו את ערכו:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2)^{3n-2} \cdot 5^{-2n-5}$

**פתרון:**
נחשב

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{3n-2} \cdot 5^{-2n-5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3n}}{4} \cdot \frac{5^{-2n}}{5^5} = \frac{1}{4 \cdot 5^5} \sum_{n=1}^{\infty} (-8)^n \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^n =$$

$$\frac{1}{4 \cdot 5^5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-8}{25}\right)^n \underset{k=n-1, n=k+1}{=} \frac{1}{4 \cdot 5^5} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{25}\right)^{k+1} =$$

$$\frac{1}{4 \cdot 5^5} \cdot \left(-\frac{8}{25}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{25}\right)^k = \frac{1}{4 \cdot 5^5} \cdot \left(-\frac{8}{25}\right) \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{8}{25}\right)} = \boldsymbol{-\frac{2}{33 \cdot 5^5}}$$

**הטור מתכנס** ושווה ל $\boldsymbol{-\frac{2}{33 \cdot 5^5}}$.

דרך נוספת:

$$\frac{1}{4 \cdot 5^5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-8}{25}\right)^n = \frac{1}{4 \cdot 5^5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-8}{25}\right)^n - 1\right) = \frac{1}{4 \cdot 5^5} \left(\frac{1}{1 - \left(-\frac{8}{25}\right)} - 1\right) =$$

$$\frac{1}{4 \cdot 5^5} \left(\frac{25}{33} - 1\right) = \frac{1}{4 \cdot 5^5} \left(-\frac{8}{25}\right) = -\frac{2}{33 \cdot 5^5}$$

**הטור מתכנס** ושווה ל $\boldsymbol{-\frac{2}{33 \cdot 5^5}}$.